大家好，我是莉楠。欢迎收看
线性代数习题课。我们在课程中学习了矩阵行列式算法以及矩阵行列式的性质。
今天我们要用两道实际例题，来练习求解矩阵的行列式。
我们要计算以下两个矩阵的行列式， 矩阵A和矩阵B，它们都是5乘以5的矩阵。
我们可以观察到矩阵A对角线全部由x给出，
在前4行中，y在x右侧，在最后一行中，y出现在首位置，其余位置为0。
矩阵B的结构也很清晰，对角线仍是由x给出，但是其余所有位置由y给出。
在你开始做这两道题之前，我们先来复习一下你所学的求解矩阵行列式的方法。
你当然可以通过消元法，使得原矩阵变成一个上三角矩阵;
或者是你可以直接用矩阵的定义公式来求解行列式;
或者是你还可以使用代数余子式，也就是一般所称的拉普拉斯公式，
你可以沿矩阵任意行或任意列展开，
计算该行或该列与其对应的代数余子式的内积。
好，现在请你暂停这个视频，试图求解
以下两个矩阵的行列式，随后我将演示我的解法。
好，我希望你已经完成了你的计算。
下面我们来一起求解这两个矩阵的行列式。先来看矩阵A，
你可以看出矩阵A有很多0元素，
所以我们应该不需要再使用消元法来引入更多的0元素。
另外，你可以观察出这个位置的y元素比较特殊，
因为如果这一行和这一列不存在的话，
那么剩余位置就是一个很简单的下三角矩阵。同样，如果第一列与第一行不存在
的话，那么剩余位置就是一个上三角矩阵。这就说明我们应该使用第三种方法
求解矩阵A的行列式。我们可以通过对矩阵A的第一列展开，
计算这两个元素1，1元素与5，1元素的代数余子式来求解行列式。
具体做法如下，矩阵 A的行列式由以下两项给出， 第一项是1,1位置元素，也就是x
乘以该位置的代数余子式， 也就是剩余4乘4矩阵的行列式。
那这个4乘4矩阵是上三角矩阵，所以它的行列式
就由对角线元素乘积给出，也就是x的4次方。另外一项是5，1位置元素y，
乘以该位置的代数余子式，
该位置的代数余子式也是由一个4乘4矩阵行列式给出，
这是一个下三角矩阵，所以该矩阵的行列式同样是对角线元素的乘积，
也就是y的4次方。但是一般情况下， 这里还应该有一项来显示这一项的符号，
因为我们所看到的y是在5，1位置， 那么这项的符号由这个因数给出，-
1的5+1次方。这种情况下也就是说，矩阵A的行列式 等于x的5次方，加上y
的5次方。你可以检验你的答案 是否正确。你可以看出矩阵A的
行列式比较简单，因为矩阵A含有很多0元素。下面我们要求解矩阵B的行列式。

请看这边， 矩阵B的结构同样很清晰， 对角线由x给出，
非对角线位置由y给出， 但是一般情况下， 矩阵B并没有任何0元素。
所以我们第一步应该进行消元， 可以使得矩阵B 有更多的0元素， 具体做法如下。
在进行消元法的时候， 你当然可以按照一般的消元法从第一行开始逐行消元，
但是在这种情况下， 有一种更为简便以及有效的方法，
我们观察到矩阵B相邻两行之间有很多
共同的元素， 比如说在第四行和第五行之间，
前三个位置的元素完全相同， 不同之处只在于最后两个位置。
所以如果你从第五行中减去第四行的话， 那么 新的第五行就将成为0， 0， 0， y-x， x-y。 你可以看到这一步就在新的第五行中引入了三个0元素。
观察第三行与第四行， 它们具有同样的性质。
如果我在第四行中减去第三行的话， 那么
我同样可以引入三个0元素， 因为新的第四行就将成为0， 0 y-x， x-y， 0。同理在第三行中减去第二行， 新的第三行就将成为0， y-x， x-y， 0， 0。
最后， 我们在第二行中 减去第一行， 那么新的第二行就是y-x， x-y， 0， 0， 0。
第一行暂时不变， x， y， y， y， y。你可以看出， 通过对矩阵B的行消元，
我们引入了很多的0元素。再观察这个新矩阵的
结构， 我们注意到， 在每行两个相邻的非0元素，
它们之间的差异只是一个符号， 也就是说
如果我能对它们求和的话， 那我将能够引入更多的0元素，
这就涉及到了我们对列进行初等变换， 这也是不改变行列式的。

具体的变化方法如下， 我先保持最后一列不变， y， 0， 0， 0， x-y， 然后
我把最后一列加到第四列上， 你可以看出这样的话， 第四列就将变成
2倍的y， 0， 0 x-y， 这个位置就由原来的y-x变成0。
这样的话我增加了第四列中的0元素个数， 那么你如果继续的话， 你可能会想要将
第四列加至第三列上。 如果你进行这个操作的话， 第三列将变成2倍的y 0， x-y，
这个位置将被消成0， 但是这个位置 你又引入了一个非0元素， 也就是y-x。
这样的话， 新的第三列并没有比原来第三列含有更多的0元素。
所以我们需要找到一种办法使得这个位置可以被消成0。
你也许已经注意到如果你再把一份第五列加至第三列上的话， 这个位置就变成0。
那么在原来的矩阵中， 实际上你要做的就是
把一份第四列与一份第五列同时加到第三列上， 那这样新的第三列实际上就变成
这个位置是3y， 3倍的y， 这个位置就变成0。 所以我们应该按照这个规律继续，
那对于第二列的话， 我们需要做的 就是把第三列、第四列
以及第五列全部加到第二列上， 那么新的第二列就将变成4y x-y， 0， 0， 0。
最后， 对于第一列， 我们要把第二列到第五列全部加到第一列上，
那新的第一列就将变成x+4y， 其余位置全部为0， 这样我们就大大简化了矩阵B，

你可以看出最后我们得到的实际上是一个上三角矩阵。
这样的话矩阵B的行列式就很容易计算，矩阵B的行列式等于这个
上三角矩阵的行列式，也就是由对角线上元素的乘积给出。那么就是x+4y 乘以x-y的4次方。这就是我的方法，也许与你的方法不同，但是这两个例子
告诉我们在求解矩阵行列式的时候，我们应该灵活使用
一种、甚至两种方法的组合，尤其是在矩阵的结构
具有某些特殊的性质的时候，求解矩阵行列式
可以是难的，但同时也是有很多乐趣。
我希望这两个例子对你有所帮助，我们下次再见。