

大家好，我是莉楠，欢迎收看线性代数习题课。

很高兴，能为大家讲解第一节习题课。

我们在第一节课中学习了很重要的一些概念，

我们学习了如何在不同的视点下，来观察一个线性方程组。

主要有行视点、列视点，还有在矩阵的意义下，来求解一个线性方程组。

那么今天我们将用一个比较简单的例子，来复习这些概念。

你对其中一些概念可能已经比较熟悉，但是另外一些概念可能是一些新的内容。

我们来一起看这个简单的2乘2线性方程组，

这里我们有两个方程，两个未知数X与Y，

我们要找到X和Y，使得这两个方程同时成立。

我要你们先做的是求解这个方程组，你可以看到这个方程组其实非常简单。

但是更重要的是，我希望你们能利用这个方程组来

复习在课堂上所学的行视点与列视点，你可以在一个XY坐标系中画出你的答案。

现在请你暂停这个视频，随后我将回来

讲解如何找到行视点与列视点，一会儿再见。好，欢迎回来。

我们先来一起求解这个线性方程组。

那么你常用的求解方法是哪一种呢？你当然可以用替换法，

也就是将X写成关于Y的一个公式，再替换到另外一个方程中。

我们来利用第二个方程，将X写成Y的公式。那么由第二个方程，你可以看到 $X=2Y-1$ ，再将这个式子替换到第一个方程中，就得出2倍的X替换成

2倍Y减去1， $2(2Y-1)$ 再加上Y等于3，这样你得到了一个只关于Y的方程。

简化这个方程，你可以看到，这里是 $5Y$ ， $5Y-2=3$ ，也就是说 $Y=1$ 。

如果 $Y=1$ 的话，再根据这个式子，我们可以看到X

也等于1。你可以看到这个解非常简单。这组线性方程的解就是 $X=Y=1$

那么下面我们来关注一下，如何在行视点和列视点下观察这个线性方程组。好，

我们要在这个XY坐标系中先画出这个线性方程组所对应的行视点，

所谓行视点，就是说我们要逐行考虑这个线性方程组，

这里是第一行，这里是第二行，那么如果只看第一行的话，

这给出一个什么东西呢？你可以看到，XY是两个变量，那么要满足 $2X+Y=3$ ，

你可以看到这个方程，实际上给出了XY平面中的一条直线，

我们现在要把这条直线画在坐标系中，如何来确定这条直线呢？

最简单的办法就是找到直线上的两点，

将两点连接的话，我们就得到了唯一一条直线。

要找到这两点的话，我们可以将X设成两个任意的值。

为方便起见，先将X设成0，如果X是0的话，Y应为3，也就是说

这条直线肯定要经过这一点，X是0，Y是3，再来把X设成1，

如果X是1的话，那么Y也为1，也就是说这条直线还应该经过这一点。

这样的话，我们就有了直线上的两点。将它们连接的话，我们就得到那条直线。

这就是经过这两点的直线，也就是由这个方程给出。 $2X+Y=3$

这是第一条直线，也就是第一行。下面来看第二行，第二行是 $X-2Y=-1$

同样它也给出了XY平面上的一条直线。

同理，将X设成0，我们看到 $X=0$ 时，Y应等于

$1/2$ ，也就是说，第二条直线应经过这一点，X是0 Y为 $1/2$ 。再来将X

设成1，如果 $X=1$ 的话，Y也等于1，就说明这条直线还应该经过这一点。

将这两点连接的话，我们就得到了第二条直线。这就是第二条直线，方程由 $X-2Y$

等于-1。这就是第二行。你可以看到在行视点下，第一行给出一条直线，

第二行又给出另外一条直线。那么将两个方程放在一起

的话，我们实际上是要找到这两条直线的交点。

因为我们希望找到XY，使得那一点同时在

第一条与第二条直线上，很显然这一点。解应由这一点相交点的坐标给出，

那么根据前面的计算，我们知道这一点的坐标应该是 $(1, 1)$ 。

同样在我们画出两条直线的过程中，我们也

注意到了两条直线都经过这个 $(1, 1)$ 点。

好，这就是行视点下观察这个线性方程组。它是两条直线相交于解所在的点。

下面来看列视点下，我们应该得到一个什么样的图片。既然叫做

列视点，那我们需要找到这个列在哪里？现在我们来观察这个线性方程组，我们

先关注X，每个方程中X前的系数，那么第一个方程中X前的系数是2，

第二个方程中X之前的系数是1，我们把它放在一起，作为一个

平面中的列向量记为 $V1$ ，这就是X前，两个方程中X前的系数。

同样的我们来关注Y前面的系数，在第一个方程中Y前的系数是1，

第二个方程中Y前的系数是-2，把它们放在一起，记做列向量 $V2$ 。

每个方程中，X前系数由这个列向量给出，那么我们可以想象，

把X看成这个列向量的系数，同样我们把Y看成这个列向量 $V2$ 的系数。

现在，这个线性方程组的左边应该写成什么呢？

你可以看到，我们实际上就是把这两项加了起来，这就是线性方程组的左侧。

那么右侧也就是把两个常数放在一起作为一个列向量。

3和1。这就给出了线性方程组的右侧。所以实际上我们做的就是把

X倍的 $V1$ 加上Y倍的 $V2$ ，要找到合适的系数X和Y，使得这个和由向量3、-1给出。

好，下面我们来完成这个图片。我们要把 $V1$ 和 $V2$ 画在这个XY坐标中。 $V1$ 是2、1，

所以 $V1$ 大概在这里。这是 $V1$ $V2$ 是1和-2，1和-2。这就是 $V2$ ，

正如我们所说的，我们要找到合适的系数XY

使得这项与这项相加，就给出了这个常数向量。那么你通过前面的求解，

可以看出X和Y应同时被取为1，也就是说，这里我们要把1份的 $V1$ ，

加到1份的 $V2$ 上，我们要求 $V1$ 与 $V2$ 的和。

在这个图片中，如何来表示 V_1 与 V_2 的和呢？我们现在是要求解两个向量的和。那么我们要做的是将两个向量所张成的平行四边形画出。

在这个平行四边形上，对角线上的向量，就是这两个向量的和，就是这个向量。我们来验证这个向量是否等于这个常数向量呢？

我们是把1倍的 V_2 加到1倍的 V_1 上，你可以分别检验两个坐标。

X坐标2加上1等于3，这是 $2+1=3$ ，Y坐标是 $1-2=-1$ 。好，这就是列视点下，和该线性方程组所对应的图片。

我们是将1倍的 V_1 与1倍的 V_2 相加，结果得到这个常向量。3、-1，那么这个系数，1、1，来自于

之前我们的求解，也同样来自于行视点下的图片。

好，这就是和这个例题相关的行视点和列视点。

在结束之前，我还来介绍一下，如何在矩阵的形式下来观察这个线性方程组。

这里我们应该关注哪一个矩阵呢？现在我要把这个向量 V_1 和 V_2 放在一起，作为列向量，所得的矩阵记为A，这就是我们所要关注的矩阵。

展开的话，应为2、1、1、-2。

在这样考虑下，我们可以如何改写这个线性方程组呢？

或者说我们应该如何改写这个等号左侧呢？实际上等号左侧就变为矩阵A，乘以向量X和Y。

我把两个未知数X和Y放在一起作为一个向量，

这就变成了线性方程组的等号左侧。那么右侧就应该是3、-1，

在我们将来的一些课程中，我们会学习

如何直接求解这个方程，你看到的是一个矩阵乘以一个向量，等于另外一个常向量。

我们将学习如何可以一次性求解这个未知向量的方法，其实他的想法与对于数字方程进行求解的想法是一致的。假如说我们有数字方程 $ax=b$ ，a、b

已知，但X未知，如果a在不等于0的情况下，

我们知道这个解就很简单的由b除以a给出。你可以写成a的逆，再乘以b。

这里的想法是一样的，我们要找到另外一个矩阵，通常记为A的逆，

使得A的逆乘以A，会给出一个单位矩阵，1、0、0、1，

在这个矩阵逆存在的情况下，这个解，未知向量X、Y就可以

直接由A矩阵的逆乘以常数向量3、-1给出，在随后的课程中，

我们将学习如何求解矩阵A的逆，并如何计算矩阵A的逆与这个常数向量的乘积，但是这里，今天我将停在这里。

我希望这个例题对你们有所帮助，也希望你们可以进行

更多的练习，来尽快熟悉，这个列视点下的图片，

好，感谢收看，希望下次再见。 Funding for this video was provided by the Lord Foundation. To help ocw continue to provide free and open-access MIT courses, Please make a donation at ocw.mit.edu/donate.